Introduction à l'algèbre tensorielle

Patrick Gros

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Introduction à l'algèbre tensorielle

Patrick GROS

IRISA – CNRS

N°0238

Février 2000

THÈME 3

Rapport technique

ISSN 0249-0803

Introduction à l'algèbre tensorielle

Patrick Gros
IRISA – CNRS*

Thème 3 — Interaction homme-machine,
images, données, connaissances
Projet Vista

Rapport technique n ° 0238 — Février 2000 — 17Table des matièressubsection.3.6 pages

Résumé : Ce document est une introduction à l'algèbre tensorielle pour non mathématiciens. Écrite à l'origine dans le cadre de la vision par ordinateur, elle tire de ce domaine, et de la géométrie projective très employée en vision, quelques exemples. Elle contient une approche intuitive et une introduction plus formelle des notions de base : covariance et contravariance, produit tensoriel, bases et changements de bases, contraction et invariants, cas des espaces euclidiens.

Mots-clé : algèbre tensorielle

(Abstract: pto)

* Ce travail a été effectué dans une équipe commune au CNRS, à l'INRIA, à l'université de Rennes 1 et à l'INSA de Rennes, l'auteur relevant du premier de ces organismes.

Unité de recherche INRIA Rennes
IRISA, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex (France)
Téléphone : 02 99 84 71 00 - International : +33 2 99 84 71 00
Télécopie : 02 99 84 71 71 - International : +33 2 99 84 71 71

Introduction to Tensorial Algebra

Abstract: This document is an introduction to tensorial algebra for non mathematicians. It was first written in the context of computer vision and a few examples come from this field and from projective geometry as well. It contains an intuitive approach and a more formal introduction of basic notions: covariance and contravariance, tensorial product, bases and transformations between bases, contraction and invariants, case of Euclidean spaces.

Key-words: tensorial algebra

Les tenseurs sont des entités très fréquentes en mathématiques, physique, ou mécanique. Presqu'aussi fréquentes que les espaces vectoriels eux-mêmes, aux dires des mathématiciens. Pourtant, ils sont peu enseignés, peu connus, et on ne trouve guère d'introductions générales simples sur le sujet (on pourra par exemple voir [Sal86, Gui85]).

En vision par ordinateur, domaine d'application privilégiée de nombreuses techniques géométriques, dont la géométrie projective, l'emploi des tenseurs n'est encore que marginale. On introduit généralement la géométrie épipolaire sans parler de tenseurs, et seules les contraintes tri et quadrilinéaires nécessitent leur emploi explicite. Cet emploi pourrait toutefois se généraliser, et il a paru intéressant de rédiger une introduction au sujet, d'abord intuitive pour permettre de comprendre de quoi il s'agit sans s'encombrer de trop de formalisme, puis un peu plus formelle pour pouvoir manipuler les tenseurs de manière efficace. Les exemples donnés seront tirés de la vision quand cela est possible.

Cette introduction a pour but de permettre au chercheurs, ingénieurs et étudiants en vision de se familiariser avec ce sujet et de pouvoir en utiliser les outils sans trop se perdre dans des ouvrages spécialisés dont le niveau est parfois un peu hors de portée.

1 Approche intuitive

1.1 Introduction des tenseurs

Dans un espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les notions de base sont celles de vecteurs, qu'on peut aussi appeler points, de contrainte linéaire et de sous espaces, dont font partie les hyperplans. Vecteurs et hyperplans peuvent être représentés par des n-uplets de coordonnées ou composantes dans une base et peuvent, par ce biais, être manipulés de manière semblable.

Il en va de même en géométrie projective. Dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n$, les entités les plus simples qu'on puisse introduire sont les points, les hyperplans, et les contraintes linéaires. En effet, dans $\mathbb{P}^n$, qu'on peut assimiler à $\mathbb{R}^{n+1*} / \propto$ ou $\mathbb{C}^{n+1*} / \propto$, les points sont les éléments de $\mathbb{P}^n$, qu'on peut représenter par de simples vecteurs de coordonnées homogènes dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

L'introduction de la notion d'indépendance linéaire mène à celle d'hyperplan, et au fait que les hyperplans peuvent être aussi caractérisés par des vecteurs de coordonnées homogènes dans $\mathbb{K}^{n+1}$. De là vient le principe de dualité : les hyperplans forment un espace projectif isomorphe (c'est à dire de même structure) que celui des points, et ce qui s'applique aux points peut donc être transposé aux hyperplans. Ces deux espaces sont dits duaux.

On dispose donc de deux notions qui se manipulent et se représentent de manière similaire : les vecteurs ou les points, et les hyperplans. On peut alors introduire des contraintes linéaires sur ces entités. En voici quelques exemples dans le plan (qui seront repris dans la suite) :

1. le fait qu'un point appartienne à une droite donnée fournit une contrainte linéaire sur ce point ;
2. la fait qu'une droite passe par un point donné fournit une contrainte linéaire sur cette droite ;

3. si l'on considère le point et la droite comme variables, le fait que le point appartienne à la droite fournit une contrainte bilinéaire sur le point et la droite, c'est à dire une contrainte qui est linéaire vis à vis du point, et linéaire vis à vis de la droite ;
4. la contrainte épipolaire que l'on introduit en vision pour décrire un système de deux caméras, fournit une relation bilinéaire entre deux points qui sont les projetés d'un même point 3D dans deux images ;
5. à partir de trois ou quatre images, on peut aussi introduire des contraintes tri ou quadrilinéaires entre les projetés d'un même point.

Toutes ces contraintes peuvent s'exprimer à l'aide de tenseurs. Un tenseur est une fonction qui, à un ensemble de points et d'hyperplans, associe un réel, ceci de façon multilinéaire, c'est à dire de manière linéaire par rapport à chacun de ces points et hyperplans. Les coefficients de cette fonction peuvent se mettre sous forme d'un tableau indicé à 1, 2, 3 ou n dimensions.

La notion de tenseur en recouvre beaucoup d'autres. Ainsi, dans l'exemple 1, les coefficients de la droite auquel le point doit appartenir sont aussi les coefficients du tenseur utilisé. Selon un processus d'assimilation courant en algèbre, on peut dire que les droites (ou hyperplans dans le cas général) sont des tenseurs particuliers. Il en va de même dans l'exemple 2, et on peut aussi conclure que les points sont des tenseurs particuliers. Dans ces deux premiers cas, les tenseurs sont des applications linéaires de $\mathbb{P}^n$ dans $\mathbb{K}$, et leurs coefficients sont des vecteurs.

Dans l'exemple 4, on a affaire à une relation bilinéaire, et les coefficients du tenseur sont exprimés sous forme d'une matrice. La notion de tenseur englobe donc celle de matrice. Dans l'exemple 5, il faut construire des tenseurs à trois ou quatre dimensions. Cela devient moins intuitif, car il est difficile d'écrire un tableau de nombres à trois dimensions sur une feuille qui n'en a que deux. Mais cela ressemble tout à fait à une matrice.

On voit donc que la notion de tenseur recouvre toutes les notions qui peuvent s'exprimer sous forme d'un tableau de nombres, vecteurs et matrices en particulier. Rien de compliqué donc.

Dans l'approche mathématique, on part de la notion générale d'espace vectoriel. On introduit d'abord la notion d'espace dual, qui fournit l'équivalent des hyperplans. Cela est fait dans le paragraphe 2. Les tenseurs sont alors introduit comme étant les formes multilinéaires sur les éléments de l'espace vectoriel et de son dual. On rappelle qu'on appelle forme une application d'un espace vectoriel vers son corps de base.

1.2 Covariance et contravariance

Une question très naturelle se pose alors : qu'advient-il des coefficients de ces formes linéaires lorsqu'on change de base dans l'espace vectoriel ? On peut facilement se convaincre qu'il y a deux types de transformations différentes.

Supposons que l'espace vectoriel dans lequel on travaille est muni de deux bases, et notons $\mathbf{M}$ la matrice de changement de base. Soient P un point, de vecteurs de coordonnées $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ dans les deux bases, et Λ un hyperplan de vecteurs de coordonnées $\mathbf{l}$ et $\mathbf{l}'$. On a : $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}'$, soit $\mathbf{x}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$. Si le point P appartient à l'hyperplan Λ, on souhaite que cela soit indépendant de la base, c'est à dire que ${}^t\mathbf{l}.x = 0$ et ${}^t\mathbf{l}'.x' = 0$. Cela impose donc : ${}^t\mathbf{l}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x} = 0$ et ${}^t\mathbf{l} = {}^t\mathbf{l}'\mathbf{M}^{-1}$. On en conclue : $\mathbf{l}' = {}^t\mathbf{M}\mathbf{l}$.

Dans le cas du point, le vecteur de composantes a été transformé par $\mathbf{x}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$, et, dans le cas de l'hyperplan, par $\mathbf{l}' = {}^t\mathbf{M}\mathbf{l}$. Les entités subissant le changement comme les composantes des points sont dites **contravariantes**, les autres sont dites **covariantes**. Un tenseur d'ordre supérieur ou égal à deux, et qui a donc plusieurs arguments, peut être contravariant pour certains de ses arguments et covariant pour les autres, suivant que ces arguments sont des éléments de l'espace vectoriel ou de son dual.

Dans le cas général, il va donc falloir distinguer les dimensions covariantes et les dimensions contravariantes des tenseurs. Cela se fait couramment en plaçant les indices correspondant aux dimensions contravariantes en exposant, et ceux correspondant aux dimensions covariantes en indice. Ainsi, un tenseur d'ordre trois, avec un argument contravariant, un argument covariant et un argument contravariant, peut être noté $(T^i{}_j{}^k)$.

Ces concepts de covariance et contravariance, qui peuvent dérouter de prime abord, correspondent donc simplement à une marque qui signale ce qu'il faut faire en cas de changement de base. Cette distinction disparaît si l'on se limite à des changements de bases orthonormées. Dans ce cas, la matrice de changement de base est orthogonale, et ${}^t\mathbf{M} = \mathbf{M}^{-1}$. Il n'y a alors plus qu'une seule sorte de changement, et la distinction entre covariance et contravariance n'a plus lieu d'être. Il faut bien remarquer que cela ne se passe que lorsqu'on travaille uniquement dans des bases orthonormées.

1.3 Invariants d'un tenseur

Une autre question d'intérêt est de savoir quelles sont les caractéristiques d'un tenseur qui sont invariantes par changement de base. D'une manière plus précise, puisque les coefficients d'un tenseur varient lors d'un changement de base, on peut se demander si certaines expressions polynomiales de ces coefficients sont invariantes elles. Cela amène à s'intéresser bien sûr au déterminant ou à la trace des tenseurs d'ordre deux. Ces notions peuvent être étendues aux tenseurs d'ordre supérieur en utilisant l'opération de contraction.

Pour finir, revenons au cas de la géométrie projective. La différence majeure qu'on y trouve par rapport aux espaces vectoriels classiques est que tous les vecteurs y sont définis à un facteur multiplicatif non nul près. Cela est vrai pour les points, les hyperplans, mais aussi les matrices. Et cela l'est donc aussi pour les tenseurs. Mais un tenseur, qui est une application à valeurs dans $\mathbb{K}$, défini à un scalaire près ne peut donc prendre que deux valeurs, 0 ou 1, tous les autres scalaires pouvant être assimilés à 1. Cela explique que toutes les contraintes rencontrées en vision et en géométrie projective, et donc tous les tenseurs, sont des contraintes de nullité ou de non nullité d'une expression.

2 Dualité

Ce petit paragraphe contient un rappel sur la notion de dualité pour des espaces vectoriels généraux, notion qui est utilisée dans la suite pour les tenseurs. Dans un but de simplification, on se limitera au cas d'espaces de dimension finie.

2.1 Espaces dual et bidual

La notion de dualité, naturelle en géométrie projective, peut être aussi facilement définie dans le cas des espaces vectoriels. Dans le cadre de cet ouvrage, on se limitera à quelques rappels dans le cas d'un espace de dimension finie $E = \mathbb{K}^n$.

Définition 1
À un tel espace, on associe un **espace dual** E^**, qui est l'espace des formes linéaires, c'est à dire des applications linéaires de* E *dans* $\mathbb{K}$*. Il est facile de voir que* E^* *est un espace vectoriel.*

Étant donné une base de E, soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1 ... \mathbf{e}_n)$, on peut construire des éléments de E^*, notés $\mathbf{e}^{*1} ... \ \mathbf{e}^{*n}$, tels que, par définition :

$$\forall \mathbf{v} \in E \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{v}) \mathbf{e}_i$$

À un vecteur $\mathbf{v}$, $\mathbf{e}^{*i}$ associe donc sa i^{e} composante dans la base $\mathcal{B}$. Si l'on considère un élément $\mathbf{u}^*$ de E^*, on a :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{u}^* \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{v}) \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}^*(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{v})$$

On a donc $\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}^*(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}^{*i}$.

À partir de cela, on peut se convaincre facilement, moyennant quelques calculs supplémentaires, que $\mathcal{B}^* = (\mathbf{e}^{*1} ... \mathbf{e}^{*n})$ est une base de E^*, dite base duale de $\mathcal{B}$. Cela montre au passage que E^* et E ont la même dimension. On peut alors définir diverses notations utiles :

- le **crochet de dualité** est l'application bilinéaire de $E^* \times E$ dans $\mathbb{K}$ qui à un couple $(\mathbf{u}^*, \mathbf{v})$ associe le scalaire $< \mathbf{u}^*, \mathbf{v} >= \mathbf{u}^*(\mathbf{v})$;
- $\mathbf{u}^* \in E^*$ et $\mathbf{v} \in E$ sont dits orthogonaux si $< \mathbf{u}^*, \mathbf{v} >= 0$;
- on peut aussi définir une notion de transposition.

On peut aussi introduire la notion de bidual. E^*, à titre d'espace vectoriel, admet lui-même un dual, noté E^{**} et appelé **bidual** de E. On peut construire un isomorphisme canonique entre E et E^{**} :

$$\begin{aligned} & E \to E^{**} \\ & \mathbf{v} \mapsto \tilde{\mathbf{v}} \quad \text{tel que} \quad \forall \mathbf{u}^* \in E^* \quad < \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}^* >=< \mathbf{u}^*, \mathbf{v} > \end{aligned}$$

Identifier E et E^{**} par le biais de cet isomorphisme revient à rendre le crochet de dualité commutatif.

2.2 Changement de base

Supposons que l'on munisse E d'une deuxième base $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1 ... \mathbf{e}'_n)$. La base duale de cette dernière est notée $\mathcal{B}'^* = (\mathbf{e}'^{*1} ... \mathbf{e}'^{*n})$. La matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est une matrice $\mathbf{M} = (m_{ij})$, dont la i$^{\text{e}}$ colonne est formée des composantes du vecteur $\mathbf{e}'_i$ dans la base $\mathcal{B}$. Par ailleurs, pour un vecteur $\mathbf{v} \in E$ de composantes $\mathbf{x} = (x^i)$ dans $\mathcal{B}$ et de composantes $\mathbf{x}' = (x'^i)$ dans $\mathcal{B}'$, on a $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}'$ et $\mathbf{x}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}$.

Cherchons les formules de changement de base correspondantes dans E^*. Considérons un vecteur $\mathbf{u}^*$ de E^*. On note $\mathbf{y} = (y_i)$ ses composantes dans $\mathcal{B}^*$ et $\mathbf{y}' = (y'_i)$ ses composantes dans $\mathcal{B}'^*$.

$$\begin{aligned} < \mathbf{u}^*, \mathbf{v} > &= \mathbf{u}^* \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}^i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}^*(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}^{*i}(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}^* \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}'^i \mathbf{e}'_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}^*(\mathbf{e}'_i) \mathbf{e}'^{*i}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

On peut conclure de ce calcul que, d'une part, $y_i = \mathbf{u}^*(\mathbf{e}_i)$, et, d'autre part, $y'_i = \mathbf{u}^*(\mathbf{e}'_i)$. En utilisant la relation $\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \mathbf{e}_i$, on obtient :

$$y'_i = \mathbf{u}^* \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ji} \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji} y_j$$

La formule de changement de base dans l'espace dual est donc $\mathbf{y}' = {}^t\mathbf{M}\mathbf{y}$. Cette formule montre donc une différence de comportement nette entre l'espace E et son dual.

3 Approche mathématique

Dans cette partie, on se limitera à une présentation simple du formalisme des tenseurs, sans souci excessif de rigueur ou de généralité. Ainsi, on n'introduira pas la notion de produit tensoriel d'espaces vectoriels. On suit le plan indiqué plus haut : on introduit les tenseurs et l'opération de base qu'est le produit tensoriel, on introduit alors les bases pour décomposer les tenseurs dans ces bases. On s'intéresse alors aux changements de base et aux invariants. On conclue par le cas des changements entre bases orthonormées.

3.1 Définition des tenseurs

Commençons par donner la définition des tenseurs.

Définition 2
*Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, et soit E^* son dual. On appelle **tenseur** p fois contravariant et q fois covariant toute forme multilinéaire définie sur $(E^*)^p \times E^q$ (application multilinéaire de $(E^*)^p \times E^q$ dans $\mathbb{K}$). $p + q$ est l'**ordre** du tenseur. p et q étant ses **variances**.*

L'ordre des arguments doit être défini, mais peut être quelconque. Si on note $\mathbf{u}^{*i}$ p vecteurs de E^* et $\mathbf{v}_j$ q vecteurs de E, le tenseur $\mathcal{T}$ associe à ces vecteurs le scalaire $\mathcal{T}(\mathbf{u}^{*1}...\mathbf{u}^{*p},\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_q)$. Le théorème suivant est immédiat.

Théorème 1
L'ensemble des tenseurs de variances données et d'ordre des arguments identiques est un espace vectoriel.

Voici quelques exemples.

Tenseur contravariant du 1^er ordre. Un tel tenseur est donc une forme linéaire sur E^*, qui est donc un élément du bidual de E, et peut par conséquent s'assimiler à un vecteur de E.

$$\forall \mathbf{u}^* \in E^* \quad \mathcal{T}(\mathbf{u}^*) = <\mathbf{v},\mathbf{u}^*>$$

Les tenseurs 1 contravariants sont les vecteurs de E.

Tenseur covariant du 1^er ordre. Un tel tenseur est une forme linéaire sur E, donc un élément de E^*.

$$\forall \mathbf{v} \in E \quad \mathcal{T}(\mathbf{v}) = <\mathbf{u}^*,\mathbf{v}>$$

Les tenseurs 1 covariants sont les éléments de E^*.

Tenseur covariant du 2^e ordre. Un tel tenseur est une forme bilinéaire sur $E \times E$. Les produits scalaires, les tenseurs de déformation en mécanique des milieux continus ou la géométrie épipolaire sont des exemples de tenseurs de ce type. Ces tenseurs peuvent être symétriques, antisymétriques, définis, non dégénérés, positifs ou négatifs... Tout le vocabulaire classique des formes bilinéaires s'applique.

Tenseur contravariant du 2^e ordre. C'est une forme bilinéaire sur $E^* \times E^*$, auquel le vocabulaire précédent peut aussi s'appliquer. Les tenseurs de contrainte en mécanique sont de tels tenseurs.

Tenseur contravariant et covariant du 2^e ordre. C'est une forme bilinéaire sur $E^* \times E$: $\mathbf{u}^*,\mathbf{v} \mapsto \mathcal{T}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v})$. À tout vecteur de ce type on peut associer de manière unique une application linéaire de E dans E (endomorphisme de E) ϕ, par la formule :

$$\forall \mathbf{u}^* \in E^* \quad \forall \mathbf{v} \in E \quad \mathcal{T}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = <\mathbf{u}^*,\phi(\mathbf{v})>$$

La linéarité de ϕ est assurée par la bilinéarité de $\mathcal{T}$.
Pour se convaincre de l'unicité de ϕ, on peut utiliser la base de E^* : $\mathcal{T}(\mathbf{e}^{*i},\mathbf{v})$ est la i^e composante de $\phi(\mathbf{v})$ qui est donc unique.

$$\phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}(\mathbf{e}^{*i},\mathbf{v}).\mathbf{e}_i$$

Réciproquement, à tout endomorphisme de E, on peut associer un tenseur 1 contravariant et 1 covariant.

Cette bijection entre tenseurs de ce type et endomorphisme est même un isomorphisme entre espaces vectoriels. Soient $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux tenseurs associés respectivement à ϕ et ϕ'.

$$\begin{aligned}
&\forall(\alpha,\beta) \in I\!R^2 \quad \forall \mathbf{u}^* \in E^* \quad \forall \mathbf{v} \in E \\
&\quad \alpha\mathcal{T}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) + \beta\mathcal{T}'(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = \alpha < \mathbf{u}^*,\phi(\mathbf{v}) > +\beta < \mathbf{u}^*,\phi'(\mathbf{v}) > \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = < \mathbf{u}^*,(\alpha\phi + \beta\phi')(\mathbf{v}) >
\end{aligned}$$

On peut donc assimiler les tenseurs de ce type avec les endomorphismes. Si on ne le fait pas en général, c'est que la sémantique de ces entités est jugée différente. On peut, par contre, transposer le vocabulaire des endomorphismes à ces tenseurs, et définir le tenseur $\mathcal{T}^{-1}$ inverse d'un tenseur $\mathcal{T}$ comme étant le tenseur associé à l'endomorphisme ϕ^{-1} inverse de l'endomorphisme ϕ associé à $\mathcal{T}$.

3.2 Produit tensoriel

Une fois défini les tenseurs, on définit le produit tensoriel, qui est l'opération de base sur les tenseurs. La définition en est très simple : il suffit de concaténer les arguments, et le résultat est le produit des deux tenseurs.

Définition 3
Soient deux tenseurs :

$$\mathcal{T}' : (E^*)^p \times E^q \longrightarrow I\!K$$
$$\mathcal{T}'' : (E^*)^{p'} \times E^{q'} \longrightarrow I\!K$$

Le ***produit tensoriel*** *de $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ est un tenseur $\mathcal{T}$, noté aussi $\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T}''$, tel que :*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}(\boldsymbol{u}^{*1}...\boldsymbol{u}^{*p},\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_q,\boldsymbol{u}'^{*1}...\boldsymbol{u}'^{*p},\mathbf{v}'_1...\mathbf{v}'_q) \\
&= \mathcal{T}'(\mathbf{u}^{*1}...\boldsymbol{u}^{*p},\mathbf{v}_1...\mathbf{v}_q).\mathcal{T}''(\mathbf{u}'^{*1}...\boldsymbol{u}'^{*p},\mathbf{v}'_1...\mathbf{v}'_q)
\end{aligned}$$

On remarquera bien l'ordre des arguments. Cette opération est distributive (à droite et à gauche) par rapport à l'addition et est associative. Elle n'est pas commutative, même dans le cas de tenseurs de même type, ceci à cause de l'ordre des arguments.

Exemples

- Le produit tensoriel de deux vecteurs de E est une forme bilinéaire sur $(E^*)^2$.

$$\forall \mathbf{u}^*,\mathbf{v}^* \in E^* \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^*) = < \mathbf{a},\mathbf{u}^* > . < \mathbf{b},\mathbf{v}^* >$$

- De même, le produit tensoriel de deux vecteurs de E^* est une forme bilinéaire sur E^2.

– Le produit tensoriel d'un vecteur de E par un vecteur de E^* est un tenseur 1 contravariant et 1 covariant.

$$\forall \mathbf{u}^* \in E^* \quad \forall \mathbf{v} \in E \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^*)(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = < \mathbf{a},\mathbf{u}^* > . < \mathbf{b}^*,\mathbf{v} >$$

L'application linéaire ϕ correspondant à ce tenseur peut être calculée explicitement :

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^*)(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = < \mathbf{u}^*, < \mathbf{b}^*,\mathbf{v} > \mathbf{a} >$$

et donc $\phi(\mathbf{v}) = < \mathbf{b}^*,\mathbf{v} > \mathbf{a}$.

Le produit tensoriel permet d'introduire la notion de tenseur décomposable, c'est à dire de tenseur qui est le produit tensoriel de vecteurs de E et de E^*. La propriété qui suit ouvre la suite : si tout tenseur est la somme de tenseurs décomposables, on va chercher une base de l'espace des tenseurs sous forme d'une famille de vecteurs décomposables.

Définition 4
Un tenseur p fois contravariant et q fois covariant est ***décomposable*** *s'il peut être écrit sous forme d'un produit tensoriel de p vecteurs de E et de q vecteurs de E^*.*

Théorème 2
Tout tenseur peut s'écrire sous la forme d'une somme finie de tenseurs décomposables.

3.3 Décomposition d'un tenseur sur une base

On munit E d'une base. On cherche alors à munir l'espace des tenseurs de variances données d'une base associée et à décomposer tout tenseur dans cette base. Comme signalé précédemment, on va chercher cette base sous forme d'une famille de tenseurs décomposables. Cela permet alors d'introduire les coefficients des tenseurs, et donc de calculer plus efficacement avec des tenseurs.

3.3.1 Recherche d'une base

Munissons E d'une base $(\mathbf{e}_k)$ et E^* de la base duale $(\mathbf{e}^{*k})$. On peut alors décomposer tout vecteur $\mathbf{v}$ de E ou $\mathbf{u}^*$ de E^* selon ces bases. On note :

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{u}^* = u_k \mathbf{e}^{*k}$$

en utilisant la convention dite des indices muets ou répétés : il y a sommation par rapport aux indices se trouvant une fois en haut et une fois en bas. Ainsi $v^k \mathbf{e}_k$ représente en fait $\sum_k v^k \mathbf{e}_k$ et $u_k \mathbf{e}^{*k}$ représente $\sum_k u_k \mathbf{e}^{*k}$.

Ayant introduit des bases, on va essayer de décomposer un tenseur $\mathcal{T}$ quelconque sur ces bases. Restreignons nous, par exemple, au cas des tenseurs 1 covariant, 1 contravariant et 1 covariant (ce qui suit pouvant être généralisé sans problème à tous les autres types de tenseurs).

Commençons par considérer un tenseur décomposable tel $\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^{*k}$; on a alors :

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{w} \in E \quad \forall \mathbf{v}^* \in E^* \quad \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^{*k}(\mathbf{u},\mathbf{v}^*,\mathbf{w}) = u^i v_j w^k$$

Considérons maintenant un tenseur quelconque de mêmes variances $\mathcal{T}$. On note :

$$\forall i,j,k \quad \mathcal{T}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}^{*j},\mathbf{e}_k) = T_i{}^j{}_k$$

On a alors, en utilisant la trilinéarité de ce tenseur :

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{u},\mathbf{w} \in E \quad \forall \mathbf{v}^* \in E^* \quad \mathcal{T}(\mathbf{u},\mathbf{v}^*,\mathbf{w}) &= u^i v_j w^k \ \mathcal{T}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}^{*j},\mathbf{e}_k) \\ &= u^i v_j w^k \ T_i{}^j{}_k\end{aligned}$$

toujours en utilisant la même convention sur la sommation pour les indices répétés. On peut en conclure :

$$\mathcal{T} = T_i{}^j{}_k \ \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^{*k} \quad \text{et} \quad T_i{}^j{}_k = \mathcal{T}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}^{*j},\mathbf{e}_k)$$

Les formules ci-dessus donnent la décomposition du tenseur $\mathcal{T}$ sur la famille des n^3 tenseurs $\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^{*k}$. Cela montre que cette famille est génératrice. Pour qu'elle forme une base, il faut aussi que les tenseurs qui la compose soient indépendants. On peut se convaincre de cela en constatant tout d'abord que :

$$(\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^{*k})(\mathbf{e}_l,\mathbf{e}^{*m},\mathbf{e}_n) = \delta^i_l . \delta^m_j . \delta^k_n$$

où δ^i_j est le symbole de KRONECKER : $\delta^i_j = 1$ si $i = j$ et 0 dans le cas inverse. Si on suppose qu'une combinaison linéaire de ces tenseurs est toujours nulle :

$$T_i{}^j{}_k \ \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^{*k} = 0$$

on obtient alors successivement les propriétés suivantes qui prouvent l'indépendance :

$$\begin{aligned}&\forall l,m,n \quad T_i{}^j{}_k \ \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^{*k}(\mathbf{e}_l,\mathbf{e}^{*m},\mathbf{e}_n) = 0 \\ &\forall l,m,n \quad T_i{}^j{}_k \ \delta^i_l . \delta^m_j . \delta^k_n = 0 \\ &\forall l,m,n \quad T_l{}^m{}_n = 0\end{aligned}$$

On peut alors résumer tout cela sous forme d'un théorème.

Théorème 3
Les n^3 tenseurs $\mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^{*k}$ constitue une base de l'espace des tenseurs de variances considérées. Les coefficients $T_i{}^j{}_k$ sont les composantes ou coordonnées du tenseur $\mathcal{T}$ dans cette base, et on a :

$$\mathcal{T}(\mathbf{u},\mathbf{v}^*,\mathbf{w}) = T_i{}^j{}_k \ u^i v_j w^k$$

On peut donc noter l'ensemble des tenseurs considérés $E^* \otimes E \otimes E^*$.

3.3.2 Exemples

Illustrons ce qui précède sur deux cas particuliers.

Tenseurs mixte du 2e ordre. À tout tenseur de ce type est associé une application linéaire. On cherche donc à comparer les coefficients d'un tenseur avec les coefficients de la matrice de l'application linéaire associée. Pas de surprise, ce sont les mêmes.

Soit $\mathcal{T} \in E \otimes E^*$ et ϕ l'application linéaire qui lui est associée :

$$\mathcal{T}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = < \mathbf{u}^*,\phi(\mathbf{v}) >$$

On suppose que E est muni d'une base $(\mathbf{e}_k)$ et E^* de la base duale. On note alors $\Phi = (\phi^i{}_j)$ la matrice de ϕ, où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne. On note d'autre part $T^i{}_j$ les composantes de $\mathcal{T}$ dans la base $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{*j})$. On a alors :

$$T^i{}_j = \mathcal{T}(\mathbf{e}^{*i},\mathbf{e}_j) = < \mathbf{e}^{*i},\phi(\mathbf{e}_j) > = \phi^i{}_j$$

Les coefficients de $\mathcal{T}$ dans $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{*j})$ sont donc les coefficients de la matrice de ϕ dans $(\mathbf{e}_k)$.

On peut aussi introduire un tenseur transposé, dont les coefficients sont, sans surprise non plus, les transposés des coefficients du tenseur de départ. On définit ${}^t\mathcal{T}$ comme étant l'élément de $E^* \otimes E$ tel que :

$$\forall \mathbf{u}^* \in E^* \quad \forall \mathbf{v} \in E \quad {}^t\mathcal{T}(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = \mathcal{T}(\mathbf{v},\mathbf{u}^*)$$

On a donc $\mathcal{T} = ({}^tT)_i{}^j\ \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{e}_j$ et $({}^tT)_i{}^j = T^j{}_i$, ce qui était annoncé.

Tenseurs 2 contravariants ou 2 covariants. On peut définir, pour ces variances, des tenseurs particuliers : tenseurs symétriques et antisymétriques. On peut alors décomposer tout tenseur sous la forme de la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

En se plaçant dans le cas d'un tenseur $\mathcal{T} \in E^* \otimes E^*$, $\mathcal{T}$ est symétrique si :

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in E \quad \mathcal{T}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathcal{T}(\mathbf{v},\mathbf{u})$$

On a donc, dans ce cas, $T_{ij} = T_{ji}$. $\mathcal{T}$ est antisymétrique si :

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in E \quad \mathcal{T}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\mathcal{T}(\mathbf{v},\mathbf{u})$$

On a donc, dans ce cas, $T_{ij} = -T_{ji}$.

Tout tenseur $\mathcal{T}$ peut donc s'écrire sous la forme $\mathcal{T} = \mathcal{T}_s + \mathcal{T}_a$ avec $\mathcal{T}_s$ symétrique et $\mathcal{T}_a$ antisymétrique.

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in E \quad \mathcal{T}_s(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{T}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathcal{T}(\mathbf{v},\mathbf{u})) \\ \mathcal{T}_a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}(\mathcal{T}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \mathcal{T}(\mathbf{v},\mathbf{u})) \end{aligned}$$

3.3.3 Composantes d'un produit tensoriel

Prenons par exemple deux tenseurs $\mathcal{T}' \in E \otimes E^* \otimes E$ et $\mathcal{T}'' \in E \otimes E^*$ tels que :

$$\mathcal{T}' = T^i{}_j{}^k \; \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{*j} \otimes \mathbf{e}_k$$
$$\mathcal{T}'' = T^l{}_m \; \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}^{*m}$$

Le produit tensoriel $\mathcal{T}$ de $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}''$ est alors :

$$\mathcal{T} = T^i{}_j{}^{kl}{}_m \; \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{*j} \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}^{*m}$$

avec $T^i{}_j{}^{kl}{}_m = T^i{}_j{}^k \; T^l{}_m$. Dans le cas d'un tenseur décomposable $\mathcal{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^* \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \otimes \mathbf{e}^*$, on obtient, si $T^i{}_j{}^{kl}{}_m = a^i \, b_j \, c^k \, d^l \, e_m$.

3.4 Changements de base

Ayant introduit la décomposition d'un tenseur selon une base, il est naturel (ou, tout du moins, il devrait l'être) de se demander comment varient les coefficients introduits en cas de changement de base. Cette question est l'objet de ce paragraphe. Puisque les coefficients changent, on peut se demander alors si des combinaisons de ces coefficients ne restent pas invariantes. Cela est l'objet du paragraphe suivant.

Introduisons donc une nouvelle paire de bases de E et E^*, soient $(\mathbf{e}'_k)$ et $(\mathbf{e}'^{*k})$. On introduit alors les coefficients qui permettent de passer d'une base à l'autre :

$$\mathbf{e}'_k = \alpha^i_k \mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_i = \beta^k_i \mathbf{e}'_k$$

C'est la matrice $\mathbf{A}$ des α^i_k, qui donne les coefficients des vecteurs de la deuxième base dans la première, qui est appelée traditionnellement matrice de changement de base. Son inverse est la matrice $\mathbf{B}$ des β^k_i. Un vecteur $\mathbf{v}$ de E qui a pour composantes un vecteur $\mathbf{x}$ dans la base $(\mathbf{e}_i)$ a pour composantes $\mathbf{Bx}$ dans la base $(\mathbf{e}'_k)$.

Au niveau des espaces duaux, on a :

$$\mathbf{e}'^{*k} = \beta^k_i \mathbf{e}^{*i} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}^{*i} = \alpha^i_k \mathbf{e}'^{*k}$$

Un vecteur u^* de E^* de composantes $\mathbf{y}$ dans la base $(\mathbf{e}^{*i})$ a pour composantes $\mathbf{Ay}$ dans la base $(\mathbf{e}'^{*k})$.

Reprenons le tenseur $\mathcal{T}$ d'ordre trois du paragraphe précédent. Ses nouvelles coordonnées sont :

$$\begin{aligned}
T'^{j}_{i}{}_k &= \mathcal{T}(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'^{*j}, \mathbf{e}'_k) \\
&= \mathcal{T}(\alpha^p_i \, \mathbf{e}'_p, \beta^j_q \, \mathbf{e}'^{*q}, \alpha^r_k \, \mathbf{e}'_r) \\
&= \alpha^p_i \, \beta^j_q \, \alpha^r_k \, \mathcal{T}(\mathbf{e}'_p, \mathbf{e}'^{*q}, \mathbf{e}'_r) \\
&= \alpha^p_i \, \beta^j_q \, \alpha^r_k \, T_p{}^q{}_r
\end{aligned}$$

et inversement :

$$T_i{}^j{}_k = \beta_i^p \, \alpha_r^j \, \beta_k^r \, T'_p{}^q{}_r$$

Pour les formules directes, on peut remarquer que chaque dimension contravariante, notée avec un indice supérieur, introduit un facteur β, alors que chaque dimension covariante, notée avec un indice inférieur, introduit un facteur α. C'est cette différence de comportement qui oblige à distinguer entre ce qui est covariant et ce qui est contravariant.

On peut donc retenir qu'est covariant (ce qui signifie *qui varie avec*) ce qui introduit un facteur α et varie donc donc comme les vecteurs de base $\mathbf{e}'_k = \alpha_k^i \mathbf{e}_i$, et qu'est contravariant ce qui varie en sens opposé et introduit donc un facteur β.

3.5 Contraction et invariants

Ayant défini les coefficients d'un tenseur dans une base et vu comment ces coefficients évoluent par changement de base, on peut maintenant se demander s'il existe des invariants, c'est à dire des fonctions (polynomiales) de ces coefficients, fonctions qui resteraient donc invariantes par changement de base.

On peut se convaincre facilement de l'existence de telles fonctions. Si on considère un tenseur de $E \otimes E^*$, ses coefficients sont ceux de la matrice de l'endomorphisme qui lui est associé, et le déterminant et la trace sont des invariants. Dans le cas général, pour calculer des invariants, on utilise l'opération de contraction.

3.5.1 Contraction d'un tenseur

Donnons la définition sur un exemple.

Définition 5
Soit, par exemple, $\mathcal{T}$ un tenseur de $E^* \otimes E \otimes E \otimes E^*$, et soit $(\mathbf{e}_i)$ une base de E avec $(\mathbf{e}'^{*i})$ comme base duale. Alors :

$$\forall \mathbf{u}^* \in E^* \quad \forall \mathbf{v} \in E \quad \mathcal{T}_c(\mathbf{u}^*,\mathbf{v}) = \mathcal{T}(\mathbf{e}_i,\mathbf{u}^*,\mathbf{e}^{*i},\mathbf{v})$$

est indépendant de la base $(\mathbf{e}_i)$, et $\mathcal{T}_c$ est un tenseur, dit ***tenseur contracté*** *de $\mathcal{T}$ sur les indices 1 et 3.*

En effet, si $(\mathbf{e}'_k)$ est une autre base de E, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\mathbf{e}'_k,\mathbf{u}^*,\mathbf{e}'^{*k},\mathbf{v}) &= \alpha_k^i \beta_j^k \mathcal{T}(\mathbf{e}_i,\mathbf{u}^*,\mathbf{e}^{*j},\mathbf{v}) \\
&= \delta_j^i \mathcal{T}(\mathbf{e}_i,\mathbf{u}^*,\mathbf{e}^{*j},\mathbf{v}) \\
&= \mathcal{T}(\mathbf{e}_i,\mathbf{u}^*,\mathbf{e}^{*i},\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$\mathcal{T}_c$ est donc défini de manière intrinsèque et est bien une forme bilinéaire sur $E^* \times E$, donc un tenseur. On a : $T_c{}_i{}^j = T^k{}_{ik}{}^j$.

Il faut remarquer que la contraction ne peut se faire que sur des indices l'un contravariant, l'autre covariant. D'autre part, il faut toujours préciser quels sont les indices utilisés.

À partir de cette première définition, on peut définir le produit contracté de deux tenseurs, qui est le résultat du produit tensoriel de deux tenseurs, suivi par une contraction sur un indice du premier tenseur et un indice de l'autre tenseur. On le note $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \odot \mathcal{T}''$. Dans le cas général, cette notation est incomplète, puisqu'elle ne précise pas les indices sur lesquels la contraction est faite.

On note de même $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \bigodot \mathcal{T}''$ un produit doublement contracté. On peut enfin définir, lorsque cela est possible, un produit totalement contracté, qui donne alors un scalaire.

3.5.2 Invariants

La contraction est indépendante de la base. Tout scalaire, obtenu par contraction complète d'un tenseur, ou d'un produit de tenseur, fournit donc un nombre indépendant de la base, c'est à dire un invariant.

Prenons le cas d'un tenseur 1 contravariant et 1 covariant. De manière classique, on sait que les coefficients du polynôme caractéristique $\det[T^i{}_j - \lambda\delta^i_j]$ sont des invariants, dont le déterminant $\det[T^i{}_j]$ et la trace $T^i{}_i$ sont des cas particuliers. Remarquons d'ailleurs que la trace correspond à la contraction du tenseur. On peut obtenir une autre famille d'invariants par contraction :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathrm{tr}(\mathcal{T}) = T^i{}_i \\
I_2 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathcal{T} \odot \mathcal{T}) = \frac{1}{2} T^i{}_j\, T^j{}_i \\
I_3 &= \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\mathcal{T} \odot \mathcal{T} \odot \mathcal{T}) = \frac{1}{3} T^i{}_j\, T^j{}_k\, T^k{}_i \\
&\vdots \\
I_n &= \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\mathcal{T} \odot \cdots \odot \mathcal{T}) = \frac{1}{n} T^i{}_j\, T^j{}_k \ldots T^p{}_i
\end{aligned}$$

3.6 Tenseurs dans un espace euclidien

La distinction entre covariance et contravariance vient de la différence de comportement des indices correspondants en cas de changement de base. Certains introduisent un facteur α, d'autres un facteur β. Rappelons : $T'^{\,j}_{i}{}_k = \alpha^p_i\, \beta^j_q\, \alpha^r_k\, T_p{}^q{}_r$.

Si E est un espace euclidien, et est muni d'une base orthonormée, et si l'on se limite à des changements entre bases orthonormées, cette distinction disparaît. Dans ce cas en effet, les matrices de changement de base sont orthogonales, et leur inverse est donc leur transposée : $\alpha^j_i = \beta^i_j$.

La deuxième particularité d'un espace euclidien est l'existence d'un produit scalaire, qui est une forme bilinéaire particulière (symétrique, définie et positive). Notons la $\mathcal{G}$. On peut noter :

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in E \quad \mathcal{G}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u} \odot \mathcal{G} \odot \mathbf{v} = \mathbf{u}.\mathbf{v}$$

$\mathcal{G}$ est aussi un tenseur appelé tenseur métrique. Ce tenseur permet de définir un isomorphisme entre E et E^* par :

$$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in E \quad \mathbf{u}.\mathbf{v} = < \gamma(\mathbf{u}),\mathbf{v} >$$

soit $\gamma(\mathbf{u}) = \mathcal{G} \odot \mathbf{u}$ en contractant sur les indices 2 et 3. Cet isomorphisme a pour matrice la matrice de $\mathcal{G}$, soit $\mathbf{G} = (g_{ij})$.

Cette application γ permet d'identifier E et E^*. Si $\mathbf{v} \in E$ a pour composantes v^i dans une base, on note v_i les composantes de $\gamma(\mathbf{v})$ dans la base duale de E^*, et on a : $v_i = g_{ij} v^j$. Les composantes v_i sont appelées **composantes covariantes** de $\mathbf{v}$. On a alors : $\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_i v^i = u^i v_i$.

On obtient de même une relation entre indices covariants et contravariants :

$$\mathcal{T} = T^{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T_i{}^j\, \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j = T_{ij}\, \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = T^i{}_j\, \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j$$

avec, par exemple : $T_i{}^j = g_{ik} T^{kj}$.

Dans une base orthonormée, on a $g_{ij} = \delta_i^j$, et à ce moment là, $v_i = v^i$. On peut alors assimiler les indices contravariants et les indices covariants : $T_I{}^{jk}{}_l = T_{ijk}{}^l = T^i{}_j{}^k{}_l$.... Seul l'ordre du tenseur intervient alors, et pour distinguer vecteurs, matrice et tenseurs d'ordre supérieur, on peut noter : $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, $\underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}$...

Références

[Gui85] A. Guichardet. *Produits tensoriels.* École Polytechnique, Palaiseau, France, 1985.

[Sal86] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus.* École Polytechnique, Palaiseau, France, 1986.

Table des matières

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-0803